Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 5

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

8 de mayo de 2023

1. Calcular los estados de helicidad de un fotón.

La matriz de helicidad viene dada por

$$h_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -i\cos(\theta) & i\sin(\theta)\sin(\phi) \\ i\cos(\theta) & 0 & -i\sin(\theta)\cos(\phi) \\ -i\sin(\theta)\sin(\phi) & i\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

Para empezar vamos a ver que pasaría si la dirección $\vec{n}$ fuera la dirección z, es decir $\theta = 0$, sustituyendo en la matriz anterior ésta se simplifica a

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inmediatamente podemos ver que el vector $\vec{v}_0 = (0,0,1)$ es un vector propio con valor propio cero. Los otros dos vectores propios son los vectores propios de σ_y, es decir $\vec{v}_1 = (1,i,0)$ con valor propio $+1$ y $\vec{v}_{-1} = (1,-i,0)$ con valor propio -1.

Para resolver el caso general, simplemente podemos hacer un cambio de base que nos transforme el vector $(0,0,1)$ al vector $\vec{n} = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$. Esto lo podemos hacer con la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Este cambio de base convierte J_z en $\vec{n} \cdot \vec{J}$, que es justamente la matriz que nosotros buscamos. Por otra parte, los vectores propios se modifican de la siguiente forma:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - i\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) + i\cos(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) + i\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) - i\cos(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Finalmente si queremos podemos normalizar los vectores, debido a que el cambio de base que hemos hecho es ortogonal (preserva la norma) podemos normalizar los vectores en la base antigua, por lo que simplemente debemos multiplicar por $1/\sqrt{2}$ a los vectores propios con valor propio ± 1.